I FONCTION CARRÉ

1 – DÉFINITION

La fonction carré est la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$

PROPRIÉTÉS

— Un carré est toujours positif ou nul. Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.

— Un nombre et son opposé ont le même carré. Pour tout réel x, on a $x^2 = (-x)^2$.

2 – VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

La fonction carré définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$

TABLEAU DES VARIATIONS DE LA FONCTION CARRÉ

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

✳ DÉMONSTRATION

Soient a et b deux réels et f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$.

$$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

— Si $a < b \leqslant 0$:
$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $a < b \leqslant 0 \Leftrightarrow a + b < 0$ donc $f(a) - f(b) > 0$
Ainsi, sur l'intervalle $]-\infty;0]$ si $a < b$, alors $f(a) > f(b)$. La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.

— Si $0 \leqslant a < b$:
$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $0 \leqslant a < b \Leftrightarrow a + b > 0$ donc $f(a) - f(b) < 0$
Ainsi, sur l'intervalle $[0;+\infty[$ si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

CONSÉQUENCES

— Deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Si $a \leqslant b \leqslant 0$ alors $a^2 \geqslant b^2$

— Deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ alors $a^2 \leqslant b^2$

EXEMPLE

Déterminer un encadrement de x^2 pour $-3 \leqslant x \leqslant 2$.
La fonction carré f n'est pas monotone sur l'intervalle $[-3;2]$.
f est décroissante sur $[-3;0]$ et croissante sur $[0;2]$.

— Si $-3 \leqslant x \leqslant 0$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

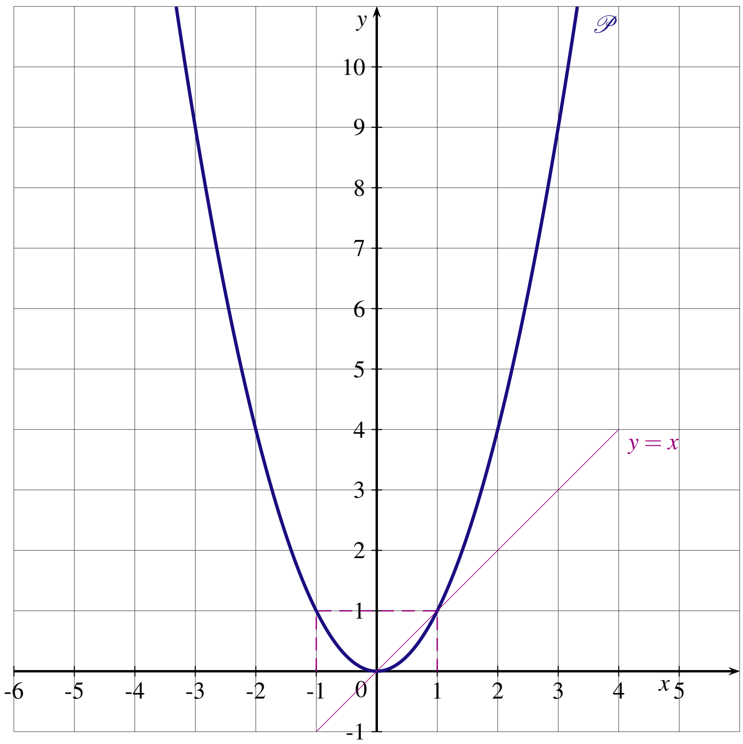
— Si $0 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$

x	-3		0		2
$f(x)$	9	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

D'après les variations de la fonction carré, si $-3 \leqslant x \leqslant 2$ alors $0 \leqslant x^2 \leqslant 9$

3 – COURBE REPRÉSENTATIVE

La courbe représentative de la fonction carré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$.



REMARQUE :

Si $0 \leqslant a \leqslant 1$ alors $a^2 \leqslant a$. Sur l'intervalle $[0;1]$, la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ est au dessous de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

4 – ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

ÉQUATIONS $x^2 = k$ AVEC k RÉEL

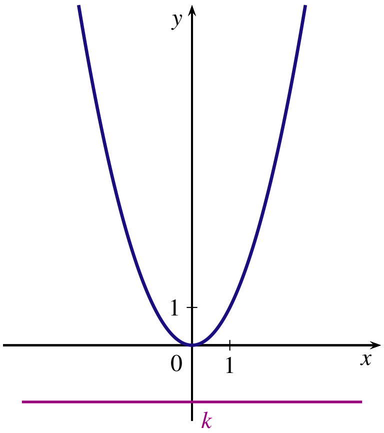
— Si $k < 0$, comme un carré est positif, l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution.

— Si $k = 0$, l'équation $x^2 = 0$ a pour unique solution $x = 0$

— Si $k > 0$, résoudre l'équation $x^2 = k$, revient à résoudre l'équation $x^2 - k = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{k}\right)\left(x - \sqrt{k}\right) = 0$.

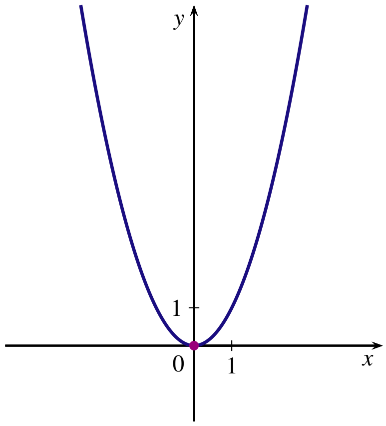
On obtient les deux solutions $x = -\sqrt{k}$ ou $x = \sqrt{k}$.

$\boxed{k < 0}$



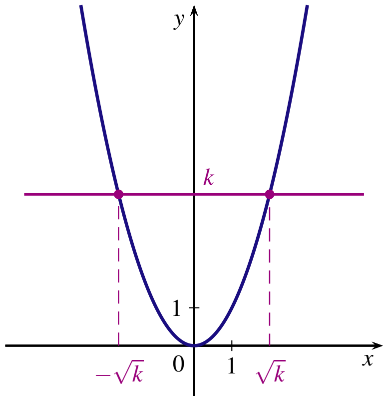
$x^2 = k$ n'a pas de solution

$\boxed{k = 0}$



$x^2 = 0$ a pour unique solution 0

$\boxed{k > 0}$

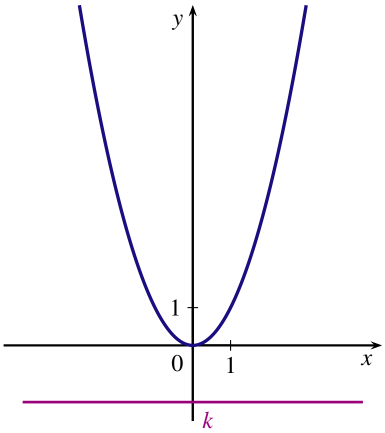


$x^2 = k$ a deux solutions $-\sqrt{k}$ ou $\sqrt{k}$

INÉQUATIONS $x^2 \leqslant k$ OU $x^2 \geqslant k$ AVEC k RÉEL

Résoudre une inéquation $x^2 \leqslant k$ ou $x^2 \geqslant k$ avec k réel revient à étudier le signe de $x^2 - k$.

$\boxed{k < 0}$



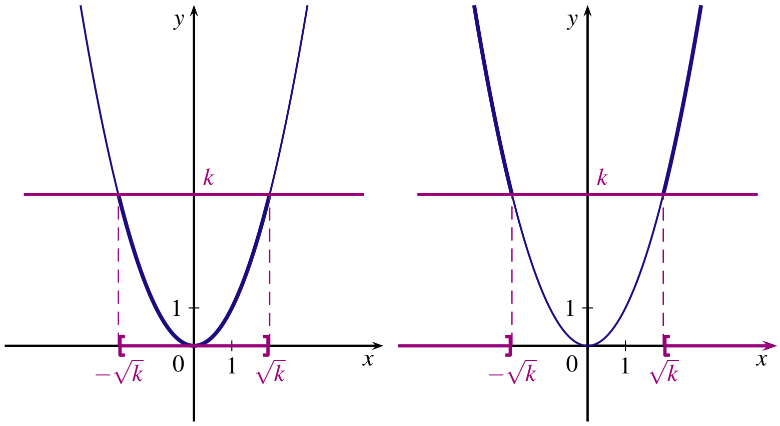
L'inéquation $x^2 \leqslant k$ n'a pas de solution :

$$S = \varnothing$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ est toujours vraie :

$$S = \mathbb{R}$$

$\boxed{k > 0}$



L'inéquation $x^2 \leqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left[-\sqrt{k}; \sqrt{k}\right]$$

L'inéquation $x^2 \geqslant k$ a pour ensemble solution :

$$S = \left]-\infty; -\sqrt{k}\right] \cup \left[\sqrt{k}; +\infty\right[$$

EXEMPLE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 > 9$.

Pour tout réel x,

$$x^2 > 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) > 0$$

Étudions le signe du produit $(x+3)(x-3)$ à l'aide d'un tableau de signe.

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 > 9$ est $S =]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$.